

# Deformación interactiva de modelos volumétricos con dispositivos hápticos

Francisco J. R. Prados y Alejandro J. León

Grupo de Investigación en Informática Gráfica (<http://giig.ugr.es>), Dpto. de Lenguajes y Sistemas Informáticos,  
E.T.S. de Ingenierías Informática y de Telecomunicación, Periodista Daniel Saucedo Aranda, s/n 18071 Granada (Spain)

---

## Abstract

*El campo de la interacción háptica con modelos deformables ha experimentado numerosos avances, desde los primeros modelos que aproximaban un comportamiento puramente elástico hasta las aproximaciones más modernas que recogen comportamientos plásticos o con histéresis elástica.*

*Hasta el momento se han seguido dos estrategias de simplificación a la hora de abarcar la complejidad de los modelos. Por una parte se han simplificado los modelos que representan la forma de los objetos y, por otra, se han reducido las capacidades de deformación sobre estos. Ambas simplificaciones provocan que los resultados que producen los modelos se alejen del comportamiento físico real del material.*

*Este trabajo presenta un nuevo modelo de deformación que se basa en una representación volumétrica de los objetos y en el modelado del comportamiento ideal de un sólido elastoplástico para realizar la deformación.*

*La respuesta en fuerza (requerida por el dispositivo háptico) y la correspondiente deformación del objeto se calculan en el momento de la interacción; actualizando el estado del material en el entorno de la herramienta de interacción y computando la fuerza de salida en base al modelo físico mencionado. Este análisis y actualización se producen en un tiempo de ejecución acotado, ofreciéndose una interacción natural y realista que se refleja tanto en la respuesta visual como en la sensación táctil generada.*

Categories and Subject Descriptors (according to ACM CCS): I.3.6 [Computer Graphics]: Interaction techniques

---

## 1. Introducción

La posibilidad de simular una respuesta táctil permite la creación de entornos virtuales que de otro modo tendrían poco o ningún sentido. La escultura virtual, por ejemplo, requiere para funcionar con naturalidad un dispositivo de entrada tridimensional, así como una respuesta en fuerza del sistema. Algunas aplicaciones médicas, tales como la exploración de resonancias magnéticas o de tomografías axiales computerizadas, también pueden beneficiarse de las posibilidades ofrecidas por los dispositivos hápticos; haciéndose también viables, también en el entorno de la medicina, aplicaciones de simulación de intervenciones quirúrgicas [DA04].

La adición de respuesta háptica a un sistema no es en absoluto trivial. Los dispositivos hápticos requieren que la respuesta en fuerza se actualice a la frecuencia de 1kHz. Por tanto, el cálculo de la dirección y de la magnitud de la fuerza provoca un cuello de botella, consumiendo mucho tiempo

de CPU y obligando a buscar un compromiso entre realismo físico y buen rendimiento.

Los materiales rígidos no presentan problema alguno a la hora de computar una respuesta háptica, puesto que la interacción con ellos no produce ningún cambio en su superficie. Por contra, los objetos deformables presentan alteraciones elásticas o plásticas al aplicar una fuerza sobre ellos. Esto produce que el cálculo de la interacción táctil se complique, debiéndose calcular por un lado la deformación producida y por otro la oposición del material a la deformación (respuesta en fuerza). Ante este problema, algunos estudios han propuesto soluciones heurísticas, procurando generar una sensación natural, pero que carece en algunos casos de sentido físico [KP04], y que simplifica de forma arbitraria la realidad en otros [CSH03].

Este trabajo propone un método que se apoya en el análisis del material simulado y en el historial de deformaciones para calcular la respuesta en fuerza y la deformación, salvando

do así las lagunas de contribuciones anteriores. Para ello se introducen dos nuevos modelos de cálculo: la *teoría incremental de la plasticidad* aplicada al dominio del volumen, para el cómputo de la respuesta en fuerza; y el *algoritmo de dispersión recursiva*, para la estimación de la deformación. Para situar el contexto de la aportación, en primer lugar se apuntará un breve estado de la cuestión en simulación de materiales no rígidos. A continuación se hará un breve inciso en mecánica de sólidos deformables, y, una vez sentadas las bases físicas, se trasladarán los principios que rigen la deformación al dominio del volumen. Finalmente se expondrán las dificultades que surgen al implementar este modelo, así como sus posibles soluciones y mejoras.

## 2. Trabajos previos

Las contribuciones en el ámbito de la interacción con modelos deformables se centran, mayoritariamente, en la simulación de sistemas de escultura virtual o en la simulación de tejidos orgánicos. En el aspecto técnico se pueden dividir en dos grandes grupos: los que utilizan modelos de superficie para la simulación —obviando así la naturaleza interna de los materiales— y los que utilizan modelos volumétricos.

### 2.1. Simulación de materiales deformables con modelos de superficie

En el trabajo desarrollado por Kim y Park [KP04] se puede encontrar un sistema de escultura basado en la idea del *proxy* (sugerida por Zilles y Salisbury [ZS95] y desarrollada posteriormente por Ruspini [RKK97]). El *proxy* es un objeto virtual que persigue a la herramienta y que está confinado a la superficie del objeto. Si el puntero del dispositivo de entrada incide dentro del objeto, se genera una fuerza de reacción hacia el exterior, siguiendo la ley de Hook  $F = k \cdot x$ , donde  $x$  es la distancia entre la posición real de la herramienta y la posición del *proxy*. Si bien el método del *proxy* fue diseñado inicialmente como un método estático en el cual la superficie no admitía deformación alguna, Kim y Park permitieron que la superficie virtual se actualizara, deformando la geometría siguiendo el empuje del puntero del dispositivo háptico. También usan el concepto del *proxy* Jagnow y Dorsey [JD02], apoyándose además en la subdivisión del modelo en una partición de bloques (*slabs*) que redefinen la superficie en términos de desplazamientos respecto de la base del bloque. Esto proporciona un campo vectorial que permite el cálculo eficiente del *proxy*, y consecuentemente de la respuesta en fuerza.

Los métodos muelle-masa (del inglés *spring-mass*) utilizan un modelo de superficie con una serie de puntos de control interiores (masas) conectados por muelles. La tensión puntual aplicada a la superficie se propaga por la red de muelles, consiguiendo una deformación eficiente y una respuesta en fuerza fácil de calcular (dada por la combinación de las compresiones de los distintos muelles que inter-

vienen). Estos modelos han sido ampliamente utilizados para calcular deformaciones en tejidos humanos y materiales elásticos [De198], y se han obtenido resultados satisfactorios al combinarlos con interacción háptica, en trabajos como el de Choi *et al.* [CSH03], así como en aplicaciones de escultura como la de McDonnell [MQW01], en el que el sólido se subdivide en zonas controladas por masas y muelles para proporcionarle propiedades elásticas. Sin embargo, las deformaciones obtenidas mediante este método carecen de rigor físico, y están condicionadas por la disposición de las masas y de los muelles (malla cúbica, de tetraedros, etc.).

Un método similar en funcionamiento es el presentado por Costa y Balaniuk [CB01], llamado el *método de elementos largos* (en inglés, *LEM, Long Elements Method*). En este caso los muelles unen puntos opuestos en la superficie, conformando una malla ortogonal de muelles en el interior de la superficie.

El enfoque *BEM (Boundary Element Approach)* descrito por Hui y Leung [HL02] propone un medio elástico para representar un material moldeable. La relación tensión-deformación para las fuerzas aplicadas en la superficie del modelo se determina utilizando la formulación de Navier para el problema elástico. Se utiliza un modelo volumétrico para implementar las operaciones de adición y eliminación de material, si bien esta representación es intermedia y no representa el material interno, puesto que el cómputo de las deformaciones se hace en la superficie del material, sin tener en cuenta las propiedades interiores.

### 2.2. Simulación de materiales deformables con modelos volumétricos

Los modelos de superficie presentan varias incompatibilidades con la simulación de deformaciones, entre ellas, la falta de rigor físico (como se ha explicado anteriormente), y la posibilidad de intersección entre superficies opuestas en zonas de escaso grosor. Los modelos deformables (especialmente los biomecánicos) claramente requieren representaciones volumétricas [De198]. La información interna es necesaria para una correcta visualización de las deformaciones, y más importante aún, una correcta respuesta háptica.

El algoritmo *chain-mail*, desarrollado por Frisken-Gibson [FG99], utiliza una estructura volumétrica para computar las deformaciones y la respuesta táctil del material deformable. Para computar la deformación, se establece un desplazamiento máximo para cada vóxel del volumen. Si se aplica una tensión puntual sobre un vóxel, este se desplaza oponiendo una determinada resistencia. Superado el desplazamiento máximo, el vóxel *arrastra en cadena* a los vóxeles vecinos, los cuales a su vez pueden arrastrar a sus vecinos una vez superado el desplazamiento máximo. El resultado es un conjunto de vóxeles enlazados que acepta deformaciones geométricas. De forma similar a los métodos *spring-mass*, la respuesta en fuerza se puede calcular suponiendo que los

vóxeles están conectados con muelles. La estructura inicial de los vóxeles evoluciona en una composición desordenada de puntos en el espacio, lo cual puede ser un problema para determinadas aplicaciones.

Para solventar el problema de la validez física de las deformaciones elásticas, Delingette propone la aplicación de mecánica de medios continuos [CD98, DA04]. Plantea la pre-computación de las deformaciones en un modelo de elementos finitos (*FEM*, *Finite Elements Model*). En concreto, en los artículos se presentaba una estructura de vértices que conformaban una malla de tetraedros no regular. La interacción háptica se generaba mediante la aplicación de un conjunto predefinido de *operadores* básicos de interacción. Debido a la complejidad de los cálculos involucrados, no era posible calcular la respuesta en fuerza en tiempo real. Por su parte, la principal desventaja del método es la inoperatividad que presenta al aplicarlo en sistemas de partículas de gran tamaño, estableciendo en algunos casos tiempos de pre-cálculo no admisibles para determinadas aplicaciones. Peterlík [PM07] propuso una mejora al método de Delingette, usando teoría de elasticidad en su aproximación no lineal de forma más eficiente, si bien el método se apoyaba, al igual que su predecesor, en una etapa de pre-cálculo.

### 3. Mecánica de sólidos deformables

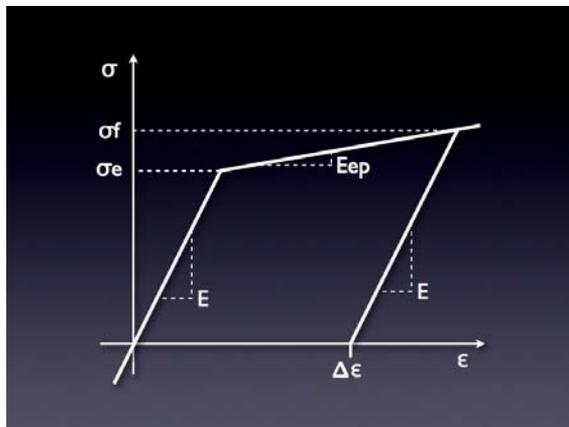
Dado que el modelo propuesto por este trabajo hace uso del comportamiento ideal de un sólido plástico deformable, se presentará a continuación una breve discusión sobre los principios de mecánica que se aplicarán posteriormente al dominio del volumen para formalizar la interacción.

En primer lugar, y atendiendo a razones de simplicidad, se expondrá el caso en una dimensión, para hacer luego la generalización a las tres dimensiones. Finalmente se hará referencia a un modelo de elementos finitos que estima numéricamente los desplazamientos internos del material [Pre84], resultado que se utilizará posteriormente para aproximar la deformación.

#### 3.1. Teoría incremental de la plasticidad en una dimensión

El comportamiento elastoplástico puede ser modelado con abstracciones matemáticas de diferente grado de complejidad. Una de ellas es la teoría incremental de la plasticidad [OdSB06]. El modelo consiste en una aproximación por tramos lineales elásticos y plásticos que relacionan la tensión puntual aplicada y la deformación que ésta genera. La transición entre los tramos elásticos y plásticos se produce atendiendo a la tensión elástica límite  $\sigma_e$  [SZY88], que delimita la tensión elástica máxima que el material permite.

Como se puede apreciar en la figura 1, la deformación  $\epsilon$  depende del tensor  $\sigma$  aplicado sobre el material, aunque no de él exclusivamente. La relación no es una función en



**Figure 1:** Relación tensión-deformación para un material elastoplástico, según la teoría incremental de la plasticidad. Se pueden diferenciar los tres tramos: carga elástica (recta con pendiente  $E$  que parte del origen de coordenadas), carga elastoplástica (recta con pendiente  $E_{ep}$ ) y descarga (recta que decrece desde  $\sigma_f$  hasta  $0$  reduciendo además la deformación  $\epsilon$ ). El ciclo completo produce una deformación permanente  $\Delta\epsilon$  en el material.

términos matemáticos: el efecto resultante de una variación en el tensor  $\sigma$  cambia, dependiendo del estado del cuerpo. La teoría incremental de la plasticidad define tres estados diferentes, asociados con las tres zonas lineales del gráfico:

**Carga elástica** La primera zona es llamada *elástica*. El cuerpo experimenta una deformación que sigue la ley de Hook, donde la deformación  $\epsilon$  es proporcional a la tensión aplicada  $\sigma$  según la constante  $E$ . Si se aplica una tensión creciente, esta relación tensión-deformación será válida hasta que se alcance el *tensión límite elástica*  $\sigma_e$ .

**Carga plástica** La segunda zona, denominada *elastoplástica*, se activa cuando la tensión aplicada supera  $\sigma_e$ . Entonces la deformación deja de ser reversible (las fuerzas ya no son conservativas) [SZY88]. La tensión aplicada produce una deformación plástica proporcional a la constante elastoplástica  $E_{ep}$ . Cualquier tensión que supere  $\sigma_e$  produce que se incremente el límite entre la zona elástica y la plástica. Este límite, llamado *tensión de fluencia*, se nota como  $\sigma_f$ , e iguala siempre a la tensión máxima aplicada. Su valor inicial es igual la tensión límite elástica  $\sigma_e$ .

**Descarga** Si la tensión aplicada baja de  $\sigma_f$ , el sistema vuelve a un estado elástico. Como se aprecia en la figura 1, en el tercer tramo de la relación la tensión y deformación vuelven a ser proporcionales según la constante  $E$  de la zona de carga elástica.

Como se ha visto, después de un ciclo completo de carga y descarga el material absorbe una cierta cantidad de energía, que causa una deformación total  $\Delta\epsilon$  (ver fig. 1). Es más,  $\sigma_f$  crece de forma tal que la tensión requerida para generar una

deformación permanente es mayor. Consecuentemente, en el siguiente ciclo de carga-descarga la tensión (y por tanto la energía) requerida para generar la misma deformación será mayor.

Sabiendo que  $\sigma_f$  crece siempre que tiene lugar un incremento en la deformación  $d\varepsilon$ , se define la ecuación constitutiva [OdSB06] para el caso unidimensional, la cual establece una relación unívoca entre tensión aplicada  $\sigma$  y deformación producida  $\varepsilon$  según la variación de tensión  $d\sigma$ :

- Régimen elástico: la tensión  $\sigma$  no supera  $\sigma_f$ .

$$d\sigma = E d\varepsilon \quad (1)$$

- Régimen elastoplástico en carga plástica:  $\sigma = \sigma_f$ , y hay un incremento  $d\sigma > 0$  en  $\sigma$  tal que  $\sigma + d\sigma > \sigma_f$ , entonces  $\sigma_f$  toma el valor  $d\sigma + \sigma_f$ .

$$d\sigma = E_{ep} d\varepsilon \quad (2)$$

- Régimen elastoplástico en descarga:  $\sigma = \sigma_f$ , y hay una variación  $d\sigma < 0$  en  $\sigma$  tal que  $\sigma + d\sigma < \sigma_f$ .

$$d\sigma = E d\varepsilon \quad (3)$$

### 3.2. Teoría incremental de la plasticidad en tres dimensiones

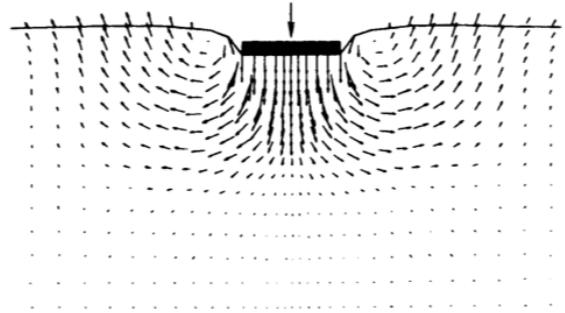
La generalización al caso tridimensional es inmediata, usando tensores de deformación tridimensionales y tomando matrices de propiedades elásticas para la ecuación constitutiva [OdSB06]. Estas matrices se denominan *tensor de propiedades elásticas* para el régimen elástico y el régimen elastoplástico en descarga (notado  $\mathbb{C}$ ), y *tensor constitutivo elastoplástico* para el régimen elastoplástico en carga ( $\mathbb{C}_{ep}$ ). Estas matrices, que son propiedades intrínsecas del material, son las homólogas de las constantes  $E$  y  $E_{ep}$  del caso unidimensional.

### 3.3. Deformación interna del material

En el trabajo presentado por Prevost [Pre84] se detalla una simulación de los desplazamientos en el interior del material por medio de un modelo de elementos finitos.

En los resultados obtenidos se muestran los campos vectoriales de velocidad resultantes al aplicar una tensión no puntual en la superficie del material, y considerando barreras reflectantes en los límites del material (véase figura 2). Cuando se aplica una tensión en la parte superior del material (en el caso bidimensional), los desplazamientos son, en la zona cercana al plano tensor, paralelos a la tensión aplicada. Sin embargo, al alejarse del plano que ejerce la presión, divergen hacia los lados debido a la presencia de una banda reflectora en el lado opuesto (parte inferior). Asimismo, vuelven a derivarse hacia arriba, por la presencia de las bandas reflectoras situadas a izquierda y a la derecha.

Por motivos prácticos (ya que el modelo virtual carece de



**Figure 2:** Campo de velocidad obtenido por Prevost, para un modelo de elementos finitos bidimensional con tres bandas reflectantes (izquierda, derecha y abajo).

apoyo y por tanto de zonas reflectantes), consideraremos en nuestro modelo que existe una única banda reflectora, en un plano perpendicular al tensor de entrada, que impide que el material se desplace en la dirección del tensor de forma indefinida. Se produce así una deformación del material tanto en la dirección del tensor de entrada como en las direcciones perpendiculares, como es esperable de forma intuitiva.

## 4. Modelo volumétrico

### 4.1. Representación del material

Para representar el material se usa una estructura de datos que consiste en un conjunto de puntos alineados en una rejilla regular y uniforme en un espacio euclídeo tridimensional. Los puntos se almacenan en una matriz de tres dimensiones, y cada uno tiene asociado un índice  $i, j, k$ . Cada punto tiene asociado un valor de propiedad real positivo, que será interpretado como el *nivel de ocupación* de material, al que nos referiremos como densidad en lo que sigue.

La vecindad de un punto será considerada como una zona homogénea donde el valor es igual al del punto. Esta zona, llamada *vóxel* y notada como  $v_{ijk}$ , es un elemento indivisible para la geometría, y será el elemento más pequeño considerado para el cálculo de fuerzas. El volumen, conjunto de todos los *vóxeles*, se notará como  $V$ . Los *vóxeles* son homeomorfos a un cubo, debido a la topología de rejilla en la que están organizados los puntos. El valor de propiedad (densidad) de un *vóxel*  $v_{ijk}$  se nota como  $d(v_{ijk})$ . El exterior del volumen se considerará organizado en *vóxeles* igualmente, asignándose densidad 0 a estos *vóxeles* exteriores.

### 4.2. Representación de la herramienta

La herramienta determina un volumen del espacio que viene definido por la función implícita  $t(x, y, z) : \mathbb{R}^3 \rightarrow V$ . Esta función determina, para cualquier punto del espacio, un subconjunto de  $V$  que se identifica con el volumen de la

herramienta. En lo que sigue consideraremos una herramienta esférica por razones de simplicidad.

Adicionalmente, se definirá un *alcance* de la herramienta como un segundo volumen implícito  $s(x, y, z) : \mathbb{R}^3 \rightarrow V$ . Los vóxeles contenidos en este volumen se usarán para analizar la densidad del volumen que rodea a la herramienta, para conseguir así una estimación de la tensión de fluencia  $\sigma_f$ .

La definición de una herramienta *dual* —que comprende dos volúmenes— viene dada por la necesidad de estimar dos parámetros. El volumen más interior,  $t(x, y, z)$  (representado en la figura 3 por la esfera), se utiliza para estimar la tensión de entrada  $\sigma$ ; mientras que el más exterior,  $s(x, y, z)$  (delimitado por las líneas más claras), permite obtener una estimación de  $\sigma_f$ , ya que el historial de deformaciones queda reflejado de forma implícita en la configuración de densidad del volumen, como se explicará posteriormente.

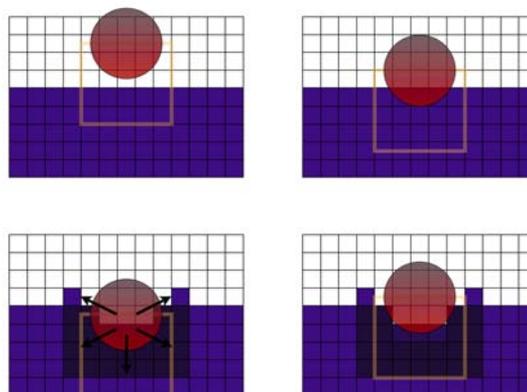
## 5. Entorno de implementación y metodología

El dispositivo háptico usado para la implementación (un PHANTOM Desktop, 6GL en la entrada, 3GL para la salida) no proporciona la fuerza aplicada por el usuario como parámetro de entrada, siendo la única información disponible la posición y la rotación del efector.

Para paliar este efecto, la secuencia natural (una variación  $d\sigma$  en la tensión de entrada  $\sigma$  produce una deformación  $d\epsilon$  en el material) debe invertirse, por lo que nuestro modelo deberá computar la tensión que se ha aplicado tras un cambio de posición de la herramienta que produzca una deformación en el material. Se debe además *generar* la oposición a la deformación del material —esto es, la respuesta en fuerza—, para lo cual se aplicará la tercera ley de Newton: cuando se ejerce una fuerza sobre un cuerpo, el cuerpo ejerce una fuerza en el sentido contrario al mismo tiempo. Teniendo en cuenta la ecuación constitutiva de la sección anterior, para una determinada deformación  $d\epsilon$  la tensión de entrada  $d\sigma$  es conocida y única. El incremento en la tensión de salida en el ciclo háptico subsiguiente será, por tanto,  $d\sigma$ . El retraso de un ciclo en la relación *acción de usuario - respuesta en fuerza* es inherente al modelo de computación por ciclos, considerando que se necesita por lo menos un ciclo para analizar la entrada y generar la salida.

Con lo expuesto, el proceso de cálculo de la respuesta en fuerza queda como sigue:

- **Análisis del entorno.** Se estudia la vecindad de la herramienta para estimar la resistencia a la deformación del material en dicha zona. El historial de deformaciones queda, como se describirá posteriormente, reflejado en el mismo valor de propiedad de los vóxeles.
- **Estimación de la deformación.** Con la variación en la posición de la herramienta se estima, en el caso de que exista colisión con el volumen, la deformación producida en el modelo.



**Figure 3:** Arriba a la izquierda: sin interacción (en dos dimensiones). Los vóxeles de la herramienta (representada con el círculo) no intersecan el volumen. El alcance se ilustra con el cuadrado vacío. Arriba a la derecha: carga elástica. Abajo izquierda: carga elastoplástica y realojamiento de vóxeles. Abajo derecha: descarga elastoplástica y vuelta al régimen elástico.

- **Estimación de la tensión aplicada.** Atendiendo a la ecuación constitutiva y al historial de deformaciones, se determina cual ha sido la tensión teórica de entrada necesaria para generar la deformación antes estimada.
- **Respuesta háptica.** Se genera una respuesta en fuerza al usuario igual a la tensión teórica calculada.

En lo que sigue se utilizará pues el término *tensión de entrada* no como un parámetro de entrada al algoritmo, sino como una variable que se debe estimar.

## 6. Cálculo de la respuesta en fuerza

En el sistema de escultura virtual el efector del dispositivo háptico controlará la herramienta volumétrica descrita anteriormente. Cuando la herramienta colisiona con la superficie del volumen, se activa la operación de *presión* (en inglés *push*). Esta operación no sustrae ni añade material, sino que literalmente *empuja* el objeto para obtener una deformación.

Esto tiene un efecto directo en la representación del volumen: en la zona afectada, un subconjunto de vóxeles serán modificados según la tensión de entrada  $d\sigma$  se incrementa. A este punto se debe establecer una relación unívoca entre la posición de la herramienta respecto del volumen, la topología de la superficie del volumen y  $\epsilon$ , para que la deformación visual y la respuesta en fuerza sea consistente con el comportamiento elastoplástico ideal detallado en la sección 3.

**Sin interacción** El volumen que engloba la herramienta contiene únicamente vóxeles de densidad 0.

**Carga elástica** Cuando la herramienta interseca la superficie, el sistema pasa al régimen de carga elástica. No se

modificará la topología, puesto que en el régimen elástico las fuerzas son conservativas y esta deformación se recupera al disminuir la tensión.

El cuerpo permanece en régimen elástico hasta que se alcanza la tensión  $\sigma_f$ . Se definen  $\sigma$  y  $\sigma_f$  como sigue:

- $\sigma_f$ : Dado que la tensión de fluencia depende del historial de deformaciones del material, y que, como se explicará después, una deformación causa un aumento de densidad en el material adyacente a la herramienta, la tensión de flujo se puede estimar directamente con el alcance:

$$\begin{aligned} V^s &= \{v_{ijk} \in V \cap s(x, y, z)\} \\ \sigma_t &= k^s \sum_{V^s} d(v_{ijk}) \end{aligned} \quad (4)$$

Donde  $k^s$  es una constante,  $s(x, y, z)$  es el conjunto de vóxeles en el volumen implícito del alcance para una determinada posición de la herramienta  $(x, y, z)$ , y  $V$  nota todos los vóxeles del volumen. La estimación no tiene por qué ser necesariamente lineal, si bien se ha definido así por razones de simplicidad.

- $\sigma$ : La tensión de entrada se determina en función de la deformación  $\epsilon$  en el material. Al ser las fuerzas conservativas en la zona de carga elástica y no modificarse la representación —dado que las deformaciones son reversibles— se puede estimar la deformación elástica en términos del número de vóxeles de la intersección herramienta-volumen:

$$\begin{aligned} V^t &= \{v_{ijk} \in V \cap t(x, y, z)\} \\ \sigma &= k^t \sum_{V^t} d(v_{ijk}) \end{aligned} \quad (5)$$

Donde  $k^t$  es una constante, y  $t(x, y, z)$  es el conjunto de vóxeles incluidos en el volumen implícito de la herramienta.

Conforme la herramienta entra en el volumen, el conjunto  $t(x, y, z) \cap V$  crece, al igual que  $\sigma$ . En el momento en el que llega a  $\sigma_f$ , el sistema evoluciona al régimen elastoplástico en carga.

**Carga elastoplástica** Al contrario que en la carga elástica, la carga elastoplástica modifica los valores de densidad del volumen, de forma que la deformación es permanente. Cuando la tensión de entrada alcanza el valor de  $\sigma_f$ , se empiezan a vaciar vóxeles (ver figura 3). Esta densidad evacuada se traslada a los vóxeles adyacentes según la *función de transferencia de densidad*. La densidad, en cualquier caso, se traslada, nunca se pierde. Si la zona adyacente a la herramienta alcanza la densidad máxima, se desplaza en cadena a zonas más exteriores.

La función de transferencia de densidad satisface la asunción hecha al definir  $\sigma_f$  de que la operación de presión incrementa la densidad en el entorno de la herramienta, ya que la densidad realojada lo hace en primer lugar en los vóxeles adyacentes y contenidos en el alcance, y por tanto  $\sum_{V^s} d(v_{ijk})$  aumenta, al igual que  $\sigma_f$ .

**Descarga elastoplástica** Al alejar la herramienta del volumen causará el estimador de  $\sigma$ ,  $\sum_{V^t} d(v_{ijk})$ , decrezca. En este caso  $\sigma$  caerá por debajo de la tensión de fluencia  $\sigma_f$ , y el sistema regresará al régimen elástico.

Al no registrarse desde un principio la deformación elástica, la descarga elástica no producirá, consecuentemente, ningún cambio en la distribución de densidad, siendo perceptible este cambio únicamente en la respuesta táctil.

## 7. Cálculo de la deformación: dispersión recursiva

Como se ha comentado previamente, cuando el sistema entra en la zona de carga elastoplástica la topología del volumen se modifica de forma permanente. Esto se consigue mediante la *función de transferencia de densidad*, la cual determina de qué forma se realoja el material cuando éste se deforma por la aplicación de la herramienta.

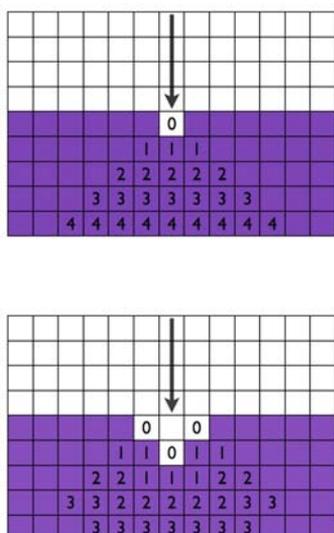
Para estimar la configuración tras la deformación se seguirán los campos de desplazamientos de Prevost [Pre84] que se apuntaron anteriormente. Cabe destacar, no obstante, que el modelo de Prevost considera el *desplazamiento* de los vértices del modelo de elementos finitos. El modelo aquí desarrollado, en lugar de desplazar los vóxeles, utiliza la redistribución de los valores de propiedad. Los vóxeles del volumen implicados en una deformación se hacen más densos o menos densos, pero no cambian su posición.

La función de transferencia de densidad se activa siempre que el sistema entra en la zona de carga elastoplástica. Debido al modelo de cálculo explicado anteriormente —en el que primero se estima la deformación y posteriormente la tensión teórica aplicada—, el estado inicial para la función de transferencia será lo que se denominará *sobrecarga elastoplástica*, en el que se cumple la desigualdad  $\sigma > \sigma_f$ . La sobrecarga elastoplástica no debe pues entenderse como un estado inherente al modelo físico, sino como una situación anómala en el material que debe resolverse reajustando los valores de propiedad. La densidad debe redistribuirse de tal forma que la estimación de  $\sigma$  no varíe (para evitar discontinuidades en la respuesta en fuerza); y que  $\sigma_f$  se incremente, de forma que una vez relajada la situación de sobrecarga elastoplástica suceda que  $\sigma \leq \sigma_f$ .

El análisis del entorno de la herramienta determina exactamente las variaciones tanto de  $\sigma$  como de  $\sigma_f$ . Por lo tanto, para cualquier situación de sobrecarga elastoplástica queda completamente determinado el exceso de material que ha de realojarse.

La función de transferencia llevará a cabo esta tarea aplicando el *algoritmo de dispersión recursiva*, que se describe a continuación.

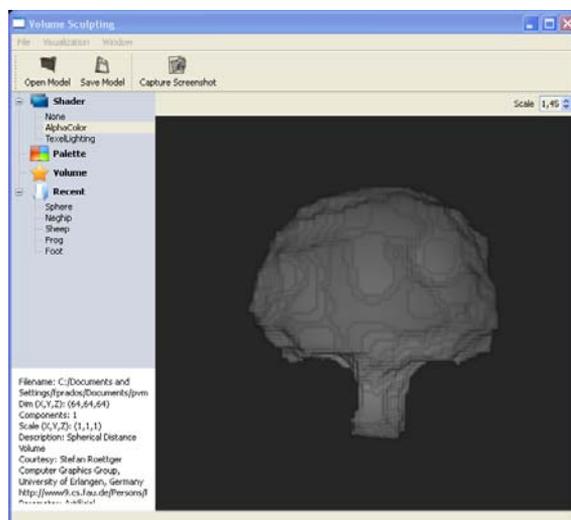
1. Existe un exceso de material en la intersección de la herramienta con el volumen, y además existe una dirección para la dispersión del material, que viene dada por la dirección de la tensión de entrada estimada en ese instante.



**Figure 4:** Arriba: primera pasada del algoritmo. El vóxel marcado con "0" pierde toda su densidad, y se reparte entre los vecinos siguientes, siguiendo la dirección del tensor de entrada (marcados con "1"). Si sobra densidad, la recursividad avanza hasta los vóxeles marcados con "2", y así sucesivamente. La dirección de la dispersión viene dada por el tensor aplicado. Abajo: Siguiendo acciones del algoritmo. Se les asigna densidad nula a los vóxeles marcados con un "0", para relajar la sobrecarga elastoplástica, y su valor de propiedad se dispersa recursivamente.

2. Se toma el vóxel más interior de la herramienta, se le asigna densidad 0, y se traspa la densidad que antes pertenecía al vóxel a los vecinos *delanteros*, entendiendo por vecinos delanteros los que siguen al vóxel vaciado en la dirección marcada por el vector de dispersión. La dispersión se realiza hacia delante y hacia los lados, proporcionalmente, para seguir el modelo de deformación expuesto en los fundamentos teóricos.
3. Cada uno de los vóxeles que reciben densidad incrementan su valor de propiedad hasta el valor máximo. Si después de esto queda densidad sin realojar, se distribuye entre los vecinos de forma recursiva hasta que está toda distribuida.
4. Si la estimación de  $\sigma$  sigue superando la estimación de  $\sigma_f$ , se toma el siguiente vóxel más interior con densidad distinta de cero y se repite la dispersión.

Cuando el proceso termina, los vóxeles más interiores de la herramienta se han vaciado, redistribuyéndose el valor de propiedad que antes pertenecía a dichos vóxeles en la vecindad de la herramienta. La zona circundante a la herramienta se ha hecho más densa, y de hecho es posible que vóxeles



**Figure 5:** Aplicación de escultura virtual que implementa los modelos descritos. En la captura se muestra un árbol esculpido a partir de un bloque de material guardado en un archivo PVM existente.

que estaban vacíos contengan ahora material, debido al desplazamiento del valor de propiedad. El volumen ha registrado una deformación permanente, y los parámetros de estimación de la respuesta en fuerza permanecen congruentes con el modelo teórico. De igual forma, el historial de deformaciones queda reflejado en la distribución de densidad del entorno de la herramienta, y por tanto en la estimación de  $\sigma_f$ .

En la figura 4 se aprecia la forma piramidal que toma la dispersión (hacia abajo y hacia los lados en la figura), siendo esto congruente con la asunción hecha de la existencia de una única banda reflectante opuesta al tensor (en este caso, abajo).

## 8. Implementación y resultados

Para comprobar la efectividad y resultados del método, se ha creado una aplicación de escultura virtual que implementa las técnicas aquí descritas. La aplicación (cuya interfaz puede apreciarse en la figura 5) lanza varias hebras, cada una de las cuales implementan las distintas tareas que requiere el modelo de cálculo anteriormente descrito:

- **Hebra de colisión.** Lleva a cabo el *análisis del entorno*, la *estimación de la deformación teórica* y la *estimación de la tensión teórica aplicada*. La hebra computa la intersección entre la herramienta y el volumen, y estima en cada momento la tensión de entrada  $\sigma$  usando el estimador que se describió anteriormente.
- **Hebra háptica.** Envía la *respuesta háptica* al usuario, usando la tensión de entrada  $\sigma$  que estima la hebra de co-

lisión. Al ejecutarse la hebra de colisión a una frecuencia menor de 1kHz, el vector de fuerza que se envía como respuesta se obtiene por interpolación entre valores consecutivos de la estimación de  $\sigma$  que ofrece la hebra de colisión.

■ **Hebra de deformación.** Por su parte, la hebra de deformación utiliza las estimaciones de la hebra de colisión para detectar estados de *sobrecarga elastoplástica*, aplicando en su caso el *algoritmo de dispersión recursiva* para relajar el material y efectuar el reparto de densidad pertinente. El método funciona holgadamente en volúmenes de 256 vóxeles al cubo y una herramienta esférica discreta con 32 vóxeles de diámetro, ofreciendo tiempos del algoritmo que se antojan instantáneos al usuario, puesto que produce resultados acotados en uno o dos ciclos gráficos.

En la figura 6 se puede observar el efecto del algoritmo de dispersión de valores de propiedad sobre un volumen cúbico. Las densidad se nota con niveles de gris y de transparencia, representando el color negro totalmente transparente el valor de densidad 0 (mínimo) y blanco completamente opaco el valor de densidad 1 (máximo). En la figura 7 se muestra la interacción con un modelo PVM tomado de una tomografía axial computerizada.

## 9. Conclusiones y trabajo futuro

El enfoque relatado en este trabajo es un método innovador para la simulación de materiales deformables. Usando el comportamiento ideal de un sólido deformable plástico descrito en la teoría de la plasticidad lineal, se consigue deformar un volumen según un proceso consistente desde el punto de vista físico. Comparado con otras técnicas de cómputo de respuesta háptica que carecen de base física o que simplifican el comportamiento del material, este algoritmo produce una interacción táctil natural al deformar materiales plásticos.

La línea de trabajo actual comprende la mejora de la estimación de la tensión de entrada por muestreo, estimación probabilística, o estimación y deformación por capas (siguiendo la estructura de los tejidos humanos). Trabajos anteriores de los autores [LTVS07] han obtenido resultados satisfactorios aplicando modelos jerárquicos (*octrees*) a la escultura virtual, por lo que es interesante una posible combinación con las técnicas aquí descritas. Los modelos jerárquicos proporcionan mayor compresión en zonas homogéneas del material, y mayor precisión en la visualización y en la interacción háptica en zonas que presentan mayores discontinuidades.

Por otra parte, la técnica actual descarta la visualización de las deformaciones elásticas, por ser éstas reversibles al ser las fuerzas conservativas. Sin embargo, para determinadas aplicaciones distintas de la escultura virtual o para la simulación de otros materiales puede ser interesante que dichos cambios topológicos sí estén recogidos en el modelo

de deformación, apreciándose los efectos de la zona elástica no sólo en la interacción táctil sino también en la respuesta visual.

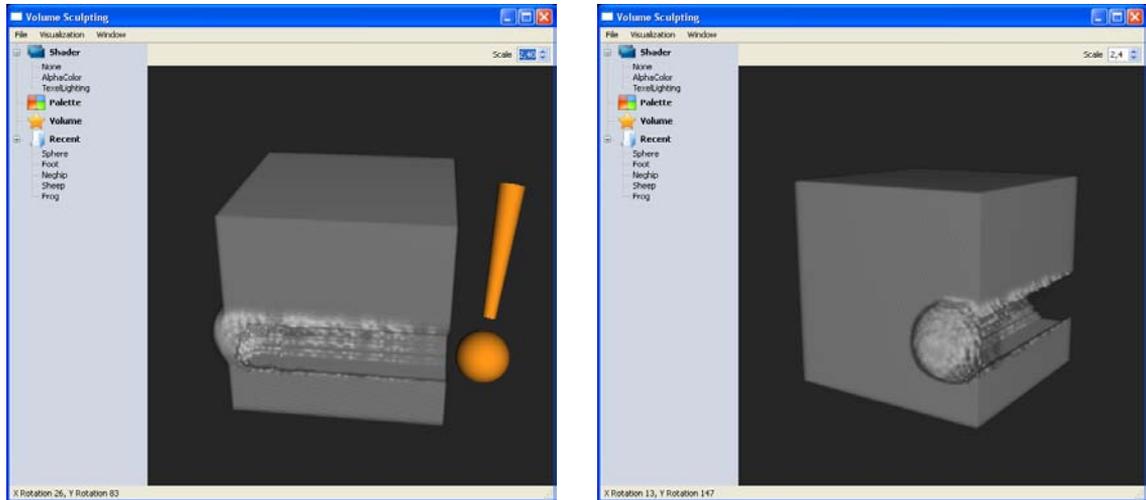
## Agradecimientos

Este trabajo ha sido parcialmente financiado por el Ministerio de Ciencia y Tecnología y los fondos FEDER, a través del proyecto TIN2007-67474-C03-02 y por la Consejería de innovación Ciencia y Empresa de la Junta de Andalucía a través del proyecto de excelencia TIC-401.

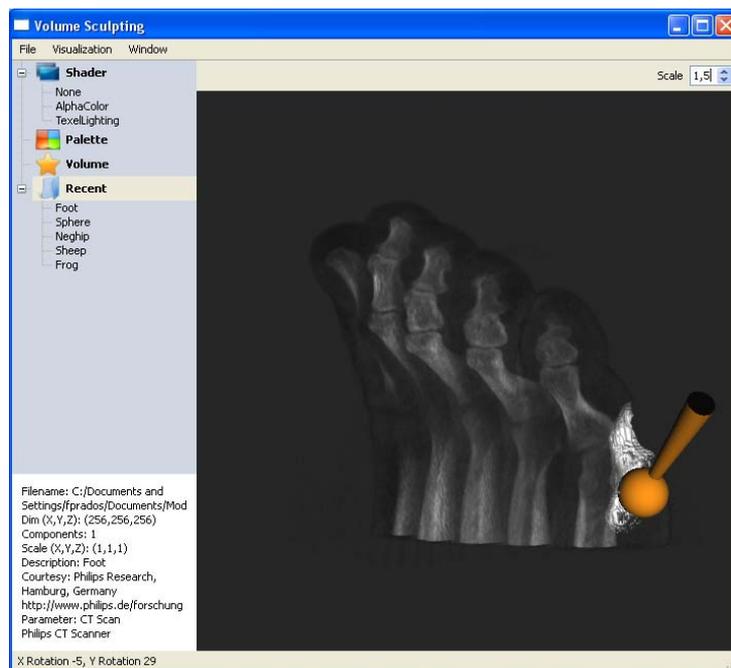
## References

- [CB01] COSTA I. F., BALANIUK R.: Lem-an approach for real time physically based soft tissue simulation. *Robotics and Automation, 2001. Proceedings 2001 ICRA. IEEE International Conference on 3* (2001), 2337–2343 vol.3.
- [CD98] COTIN S., DELINGETTE H.: Real-time surgery simulation with haptic feedback using finite elements. *Robotics and Automation, 1998. Proceedings. 1998 IEEE International Conference on 4* (1998), 3739–3744 vol.4.
- [CSH03] CHOI K.-S., SUN H., HENG P.-A.: Interactive deformation of soft tissues with haptic feedback for medical learning. *Information Technology in Biomedicine, IEEE Transactions on 7, 4* (Dec. 2003), 358–363.
- [DA04] DELINGETTE H., AYACHE N.: Soft tissue modeling for surgery simulation. In *Computational Models for the Human Body*, Ayache N., (Ed.), Handbook of Numerical Analysis (Ed : Ph. Ciarlet). Elsevier, 2004, pp. 453–550.
- [De198] DELINGETTE H.: Towards realistic soft tissue modeling in medical simulation. *Proceedings of the IEEE : Special Issue on Surgery Simulation* (April 1998), 512–523.
- [FG99] FRISKEN-GIBSON S. F.: Using linked volumes to model object collisions, deformation, cutting, carving, and joining. *IEEE Transactions on Visualization and Computer Graphics 5, 4* (1999), 333–348.
- [HL02] HUI K., LEUNG H.: Virtual sculpting and deformable volume modelling. *Information Visualisation, 2002. Proceedings. Sixth International Conference on* (2002), 664–669.
- [JD02] JAGNOW R., DORSEY J.: Virtual sculpting with haptic displacement maps. In *Proceedings of Graphics Interface 2002* (2002), pp. 125–132.
- [KP04] KIM L., PARK S. H.: A haptic sculpting technique based on volumetric representation. *Articulated Motion and Deformable Objects* (2004), 14–25.
- [LTVS07] LEÓN A., TORRES J. C., VELASCO F., SOLER F.: Escultura virtual sobre un octree con celdas duales implícitas. In *HACAD: Herramientas Avanzadas en CAD*. Spain, 2007, ch. VII, pp. 141–154.

- [MQW01] McDONNELL K. T., QIN H., WLODARCZYK R. A.: Virtual clay: a real-time sculpting system with haptic toolkits. In *I3D '01: Proceedings of the 2001 symposium on Interactive 3D graphics* (New York, NY, USA, 2001), ACM Press, pp. 179–190.
- [OdSB06] OLIVELLA X. O., DE SARACÍBAR BOSCH C. A.: *Mecánica de medios continuos para ingenieros*. Universitat Politècnica de Catalunya, 2006.
- [PM07] PETERLIK I., MATYSKA L.: An algorithm of state-space precomputation allowing non-linear haptic deformation modelling using finite element method. In *WHC '07: Proceedings of the Second Joint EuroHaptics Conference and Symposium on Haptic Interfaces for Virtual Environment and Teleoperator Systems* (Washington, DC, USA, 2007), IEEE Computer Society, pp. 231–236.
- [Pre84] PREVOST J. H.: Localization of deformations in elastic-plastic solids. *International Journal for Numerical and Analytical Methods in Geomechanics* 8, 2 (1984), 187–196.
- [RKK97] RUSPINI D. C., KOLAROV K., KHATIB O.: The haptic display of complex graphical environments. In *SIGGRAPH '97: Proceedings of the 24th annual conference on Computer graphics and interactive techniques* (New York, NY, USA, 1997), ACM Press/Addison-Wesley Publishing Co., pp. 345–352.
- [SZY88] SEARS F. W., ZEMANSKY M. W., YOUNG H. D.: *Física universitaria*. Addison-Wesley Iberoamericana, 1988.
- [ZS95] ZILLES C. B., SALISBURY J. K.: A constraint-based god-object method for haptic display. In *IROS '95: Proceedings of the International Conference on Intelligent Robots and Systems-Volume 3* (Washington, DC, USA, 1995), IEEE Computer Society, p. 3146.



**Figure 6:** Resultado de aplicar una tensión totalmente paralela al eje de coordenadas Z a lo largo de un volumen cúbico de densidad uniforme con 128 vóxeles de resolución. Como se puede apreciar en las imágenes, después de la aplicación del tensor las zonas adyacentes al paso de la herramienta han incrementado su densidad, al igual que la masa de material arrastrado, que sobresale finalmente por el lado opuesto a la incisión de la herramienta.



**Figure 7:** Deformación de un modelo PVM de 256 vóxeles al cubo con la herramienta de push, que proporciona la respuesta háptica descrita en este trabajo.